* مراجعة لأهم المفاهيم الأساسية للاحتمالات.

- الفضاء الاحتمالي:

هو عبارة عن ثلاثية (Ω, F, P) حيث:

Ω تمثل المركبة الأولى مجموعة نتائج التجربة العشوائية أو ما يسمى بفضاء العينة أو فضاء الأحداث الابتدائية لذلك قد تكون Ω تمثل مجموعة منتهية أو غير منتهية وفي الحالتين سوف يوجد لدينا ما يسمى بجدول الأحداث والذي نرمز له بـ F وهي مجموعات وكل مجموعة تمثل حدث وبالتالي يمكن حساب احتمال هذا الحدث عن طريق المركبة الثالثة P. والتي تمثل الدالة الاحتمالية ولقد تم تعريفها في مقرر مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء في السنة الأولى وتم التعرف على خصائص هذه الدالة والتعاريف الخاصة بالمجرد والاحتمال الشرطي.

ومن ثم تعرف الطالب في تلك المرحلة على ما يسمى قاعدة الضرب في الاحتمالات وصيغة بايز وصيغة الاحتمال التام وتعرف أيضاً صيغة بايز وقاعدة الضرب والأحداث المستقلة والمستقلة مثنى والمستقلة بالإجمال وأيضاً سوف نتعرف على دراسة المتغيرات العشوائية

- المتغير العشوائي:

نفرض لدينا فضاء احتمالي (Ω, F, P) عندئذ بالتعريف المتغير العشوائي والذي نرمز له بالرمز X يمثل دالة منطلقها Ω ومستقرها $\mathbb{R}$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow X(w)$$

بحيث كل نتيجة لها صورة وفي هذه الدالة يحقق الشرط:

$$\{X(w) \leq x\} \in F$$

أي تمثل حدثاً بحيث $x \in \mathbb{R}$ أي أن،

$$X(\omega) \in \left]-\infty, x\right[$$

وبناءً على هذا التعريف، إذا قالوا لنا بفرض أن X متغير عشوائي على فضاء احتمالي (Ω, F, P) عندئذ كل من المجموعات التالية سوف تمثل حدثاً،

1) $\{X \geq x\} \in F$
2) $\{X = x\} \in F$
3) $\{X \leq x\} \in F$
4) $\{X > x\} \in F$
5) $\{a < X \leq b\} \in F$
6) $\{a \leq X < b\} \in F$
7) $\{a \leq X \leq b\} \in F$
8) $\{a < X < b\} \in F$

$; \quad x, a, b \in \mathbb{R}$

بالإضافة إلى الحدثين هما الحدث الأكيد والحدث المستحيل

$$\Omega, \phi$$

$$\{X \geq x\} = \Omega - \{X < x\} \in F$$

$$\{X \leq x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\} \in F$$

$$\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\} \in F$$

على هذا الأساس يمكن إثبات أن كل مجموعة من المجموعات بالأعلى حدثاً

- الدالة التوزيعية.

نفرض X متغير عشوائي على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P)
عندئذ بالتعريف الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي نرمز لها بالشكل $F_X(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$F_X(x) = P\{X < x\} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

أي أن الدالة التوزيعية تمثل احتمال وعلى هذا الأساس يمكن أن نعرض أهم خصائص الدالة التوزيعية

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ لأنها تمثل احتمال.

2) الدالة التوزيعية التي عرفناها هي دالة غير متناقصة

$$a, b \in \mathbb{R} \; ; \; a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$$

$$a < b \Rightarrow \{X < a\} \subseteq \{X < b\}$$

$$\Rightarrow P\{X < a\} \leq P\{X < b\}$$

$$F_X(a) \leq F_X(b)$$

3) $F(+\infty) = 1 \qquad F(-\infty) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

$$F(+\infty) = P\{-\infty < X < +\infty\} = P(\Omega) = 1$$

لأنه يمثل احتمال حدث أكيد.

$$F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(\emptyset) = 0$$

لأنه يمثل احتمال حدث مستحيل.

4) الدالة التوزيعية التي عرفناها هي دالة مستمرة من اليسار
أي النهاية من اليسار تساوي F عند تلك النقطة.

$$F_X(x-0) = F_X(x)$$

لكن إذا عرفت الدالة التوزيعية بالعلاقة:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

عندئذ هذه الدالة تحقق الخصائص الثلاث الأولى التي ذكرناها لكن هذه الدالة مستمرة من اليمين أي النهاية من اليمين تساوي F عند تلك النقطة.

$$F_x(x+0) = F_x(x)$$

---

* ملاحظة:

إذا كانت الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي مستمرة عندئذ احتمال أن يأخذ هذا المتغير أي قيمة حقيقية سوف يساوي صفر أي:

$$P\{(X = x) = 0\} \ \forall \ x \in \mathbb{R} \Leftarrow F_x(x) \text{ مستمرة}$$

$$\{X = x\} = \{X \leq x\} - \{X < x\}$$

$$\Rightarrow P\{X = x\} = P\{X \leq x\} - P\{X < x\}$$

$$= F_x(x+0) - F_x(x-0)$$

$$= F_x(x) - F_x(x) = 0$$

---

* أنواع المتغيرات العشوائية

سوف ندرس نوعين من المتغيرات العشوائية:

① المتغير العشوائي المتقطع

② المتغير العشوائي المستمر

- المتغير العشوائي المتقطع

نقول عن متغير عشوائي X على فضاء احتمالي معطى أنه من النوع المتقطع إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها هذا المتغير تمثل مجموعة قابلة للعد (المجموعة القابلة للعد هي المجموعة التي يمكن مقابلة عناصرها بعناصر مجموعة الأعداد الطبيعية أو أي جزء منها هذا يعني أن المجموعة القابلة للعد قد تكون منتهية أو غير منتهية)

وبشكل آخر، نقول عن X انه متغير عشوائي متقطع اذا كان مجاله فضاء أحداث ابتدائية يمثل مجموعة قابلة للعد وسوف ندعو الاحتمال $P_X(x) = P\{X = x\}$; $X = x_1, \ldots, x_n$

بأنه يمثل توزيعاً احتمالياً متقطعاً للمتغير العشوائي المعطى اذا تحقق

1) $P(x) \geq 0$; $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) $\sum_{x=x_1}^{\infty} P_X(x) = 1$

مثال: بفرض X متغير عشوائي يسلك وفق الدالة الاحتمالية $P_X(x)$

$$P_X(x) = \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad x = 0, 1, \ldots$$

الحل: حتى يكون توزيع احتمالي متقطع لـ X يجب أن يحقق الشرطين

1) $P_X(x) \geq 0$ الشرط الاول محقق.

2) $\sum_{x=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)^x = \tfrac{1}{3} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^x$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

الشرط الثاني محقق.

مثال: بفرض X متغير عشوائي $P_X(x) = a$; $x = 0, 1, \ldots, N$

N عدد صحيح موجب

المطلوب: ايجاد قيمة a

$$\sum_{x=0}^{\infty} P_x(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{N} a = 1$$

$$\Rightarrow a \sum_{x=0}^{N} 1 = (N+1)\, a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{N+1}$$

اي التوزيع يصبح له الشكل:

$$P_x(x) = \frac{1}{N+1}$$

---

* الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي منقطع

نفرض لدينا X متغير عشوائي منقطع توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل التالي

$$P_x(x) = P\{X = x\} \; ; \; x = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

عندئذ بالتعريف الدالة التوزيعية لهذا المتغير

$$F_x(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k \leq x} P_x(x)$$

$$= \sum_{k=x_1}^{x} P_x(k)$$

وهي الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي منقطع.

مثال: نفرض X متغير عشوائي له توزيع احتمالي:

$$P_x(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \; ; \; x = 0, 1, \ldots$$

والمطلوب ايجاد الدالة التوزيعية لهذا المتغير.

$$F_x(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k=0}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

التاريخ / / الموضوع :

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{x+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1-(\frac{1}{2})^{x+1}$$

$; \; x = 0, 1, \ldots$

وعلى سبيل المثال إذا طلب منا . $P\{x<2\}$

$$P\{x<2\} = P\{x \le 1\}$$
$$= F_x(1) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\{x \le 1\} = P(0) + P(1)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\{2<x \le 3\} = P(3) = \frac{1}{16}$$

$$P\{2 < x \le 3\} = F_x(3) - F_x(2)$$

$$= (1-\frac{1}{16}) - (1-\frac{1}{8})$$

$$= \frac{1}{16}$$

$$P\{x > 2\} = 1 - P\{x \le 2\}$$
$$= 1 - F_x(2) = \frac{1}{8}$$

---

* ملاحظة :

اذا كان لدينا التوزيع الاحتمالي للمتغير المنقطع معطى على شكل جدول توزيع احتمالي يمكن توليد الدالة التوزيعية له ومن أجل

التاريخ / /

لتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

نوجد X متغير عشوائي له جدول توزيع احتمالي:

x	1	2	3	4	5
$P_X(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

نوجد الدالة التوزيعية لهذا المتغير:

$$P\{X \le x\} = F(x) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & x < 1 \\ P(1) = \frac{1}{5} & 1 \le x < 2 \\ P(1) + P(2) = \frac{2}{5} & 2 \le x < 3 \\ P(1) + P(2) + P(3) = \frac{3}{5} & 3 \le x < 4 \\ P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{4}{5} & 4 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$

انتهت المحاضرة